

# Par-delà la loi de Miner pour la modélisation de la fatigue des élastomères : théorie et expérimentation

A.JARDIN<sup>a,b</sup>, J.B.LEBLOND<sup>a</sup>, D.BERGHEZAN<sup>b</sup>

a. UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

b. Centre de Technologie Michelin, F-63040 Clermont-Ferrand, France

## Résumé :

*Des résultats d'expériences de fatigue sur des éprouvettes diabolos en élastomères présentent des disparités avec la loi de Miner. Un nouveau modèle heuristique est donc construit en introduisant un modèle d'endommagement mécanique continu qui décrit la fatigue au moyen d'un paramètre d'endommagement  $D$  et d'une loi d'évolution pour ce paramètre. Cette loi fait intervenir un paramètre empirique représentant les écarts à la loi de Miner. De meilleures prédictions des résultats expérimentaux ont été obtenues avec ce modèle qu'avec la loi de Miner.*

## Abstract :

*A series of uniaxial fatigue experiments carried out on diabolo-shaped specimens made of elastomers shows many discrepancies with Miner's cumulative damage rule predictions. A new heuristic model is then established, introducing a continuum damage mechanics model which describes fatigue by means of a damage parameter  $D$  and an evolution equation for this parameter. This law involves an empirical parameter representing the discrepancies to Miner's law. The results obtained using this model give a better representation of the experiments than Miner's rule's predictions.*

**Mots clefs :** loi de cumul d'endommagement de Miner, élastomères, expériences de fatigue

## 1 Introduction

Malgré de nombreuses recherches effectuées [1] [2] [3] [4] dans le domaine de la modélisation de la fatigue des élastomères, la loi de cumul linéaire d'endommagement de Miner [5] reste à ce jour la plus utilisée. Le premier objectif des travaux présentés ici est de tester cette loi sur les élastomères. Une série d'expériences de fatigue en traction uniaxiale à force imposée sur deux éprouvettes "diabolos" a été réalisée. Les résultats obtenus montrent des disparités avec les prédictions de la loi de Miner. Le deuxième objectif de ce travail est donc de proposer un nouveau modèle heuristique qui prenne en compte ces disparités. Pour cela nous avons introduit (i) un modèle d'endommagement mécanique continu qui décrit la fatigue au moyen d'un paramètre d'endommagement  $D$  et (ii) une loi d'évolution pour ce paramètre. Les disparités avec la loi de Miner sont représentées au moyen d'un paramètre  $\alpha$  dépendant du chargement et dont la valeur est déterminée à partir des expériences de fatigue par la méthode des moindres carrés.

## 2 La loi de cumul d'endommagement de Miner

Dans le domaine de la modélisation de la fatigue, la loi de cumul linéaire de Miner reste la plus utilisée malgré de nombreux inconvénients. Cette loi de cumul linéaire permet de prédire la rupture d'une pièce sous chargement variable en calculant l'endommagement pour cette éprouvette.

Dans le cas d'un chargement cyclique unique, la variable d'endommagement  $D_{Miner}$  est égale au rapport du nombre de cycles réalisés  $n$  sur le nombre de cycles nécessaires pour rompre l'éprouvette  $N_f$  dans le chargement donné, soit

$$D_{Miner} = \frac{n}{N_f} \quad (1)$$

Si une sollicitation cyclique est composée de  $p$  niveaux de chargements, l'hypothèse est faite que l'endommagement est donné par :

$$D_{Miner} = \sum_{i=1}^p D_{Miner\ i} = \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (2)$$

où

- $i$  représente l'indice de niveau de chargement,
- $D_{Miner\ i}$  représente la fraction de durée de vie consommée pour le niveau de chargement  $i$ ,
- $n_i$  représente le nombre de cycles effectués pour le chargement  $i$ ,
- $N_{fi}$  représente le nombre de cycles nécessaires pour rompre l'éprouvette sous le chargement  $i$ .

Lorsque l'endommagement  $D_{Miner}$  vaut 1, l'éprouvette est censée être cassée. Selon la loi de cumul de Miner, l'ordre des chargements successifs n'a pas d'influence sur la valeur de l'endommagement total.

Parmi les nombreux inconvénients de la loi de Miner, nous pouvons retenir le fait qu'elle ne prend pas en compte les effets de séquence de chargements ainsi que l'interaction entre les cycles. Ainsi, pour un nombre de cycles donné, la loi de Miner prévoit toujours un endommagement identique sans tenir compte de l'ordre dans lequel les chargements ont été appliqués.

Afin de vérifier la loi de Miner, une série d'expériences de fatigue a été réalisée, dont les résultats sont regroupés dans la partie suivante.

### 3 Campagne expérimentale et résultats

Toutes les expériences de fatigue ont été réalisées à température ambiante sur des éprouvettes diabolos (Fig.1) en élastomère de type SBR (Styrene-Butadiène-Rubber) chargées par du noir de carbone et sollicitées en traction uniaxiale à force imposée avec une fréquence de 3 Hz. La seule différence entre ces deux élastomères est le pourcentage de charge. On notera éprouvette A, celle chargée à 30 Pour Cent d'Elastomère (PCE) et éprouvette B, celle chargée à 60 PCE. Cette différence de charges implique une différence de sollicitations à appliquer afin de limiter la durée des expériences.

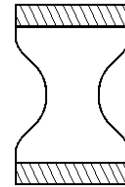


FIG.1 - Epreuve diabololo

La loi de cumul d'endommagement a été vérifiée uniquement pour deux chargements dans les travaux présentés ici. Pour l'éprouvette A, les sollicitations 1 et 2 valent respectivement 60N et 90N, tandis que pour l'éprouvette B, elles sont de 110N et 130N.

D'après l'équation (2), l'endommagement total au sens de Miner s'écrit :

$$D_{Miner} = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} = D_{Miner\ 1} + D_{Miner\ 2} \quad (3)$$

et cette quantité vaut 1 à la rupture.

Afin de vérifier cette loi de cumul, il a fallu déterminer le nombre de cycles à rupture pour chaque chargement. Pour cela, il a suffi de placer une éprouvette diabololo (Fig.1) dans une machine de traction uniaxiale en imposant un chargement donné et de relever le nombre de cycles auquel l'éprouvette casse. Ce nombre de cycles est appelé le nombre de cycles à rupture. Pour chaque chargement, une répétition d'au moins trois essais est nécessaire afin de s'assurer de la validité des résultats.

La figure 2 représente la variation des déplacements minimum et maximum pour l'éprouvette B sollicitée à 130N.

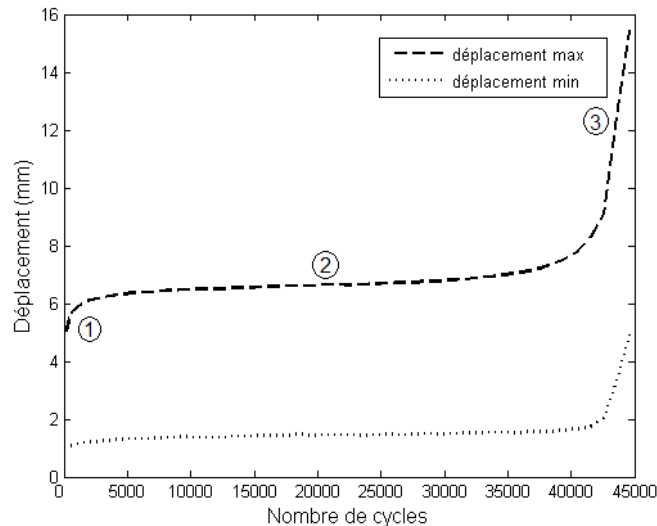


FIG.2 - Variation des déplacements min et max au cours d'une expérience de fatigue pour l'éprouvette B

La figure 2 permet de remarquer que lors de nos expériences de fatigue, on distingue trois phases. La première phase est la phase d'accommodation (notée 1) et correspond à une perte rapide de rigidité du matériau. La deuxième phase est la phase dite de stabilisation (notée 2) où l'on voit le déplacement se stabiliser. Cette phase située entre la phase d'accommodation et la phase de propagation est très longue, elle correspond à la plus grande partie de la durée de vie de l'éprouvette. La dernière phase (notée 3) correspond à l'augmentation brutale des déplacements minimum et maximum jusqu'à rupture de la pièce. Cette phase est très courte par rapport à la durée de vie totale du diabol.

Les séquences de chargements réalisées pour les éprouvettes A et B, permettant de tester la loi de cumul de Miner, sont les suivantes :

- 66% du nombre de cycles à rupture pour la sollicitation 1 puis jusqu'à rupture pour la sollicitation 2,
- 33% du nombre de cycles à rupture pour la sollicitation 1 puis jusqu'à rupture pour la sollicitation 2,
- 66% du nombre de cycles à rupture pour la sollicitation 2 puis jusqu'à rupture pour la sollicitation 1,
- 33% du nombre de cycles à rupture pour la sollicitation 2 puis jusqu'à rupture pour la sollicitation 1.

Pour chaque séquence de chargements, les expériences ont été reproduites trois fois afin de vérifier la reproductibilité des essais. La loi de cumul de Miner a donc été vérifiée douze fois pour chaque matériau.

Les expériences de fatigue permettent d'obtenir dans certains cas, un endommagement de Miner total très supérieur à 1 qui peut provenir d'un renforcement du matériau dû à la sollicitation effectuée en premier. De même pour certaines expériences, le contraire se produit, c'est-à-dire un endommagement du matériau très rapide qui provoque un endommagement total de Miner inférieur à 1. Ces observations ne permettent pas l'utilisation de la loi de cumul d'endommagement de Miner. Le but du nouveau modèle présenté dans la partie suivante est de pallier les insuffisances de la loi de cumul de Miner.

#### 4 Nouveau modèle heuristique

On suppose la loi d'évolution de l'endommagement de la forme :

$$\frac{dD}{dN} = \frac{g(D, N_f)}{N_f} \quad (4)$$

La fonction  $g(D, N_f)$  doit vérifier :

- la condition nécessaire :  $\int_0^1 \frac{dD}{g(D, N_f)} = 1 \forall N_f$  (qui résulte de ce qu'à amplitude de chargement constante,  $D$  doit atteindre la valeur 1 pour  $N=N_f$ ),
- et le fait que la fonction  $g$  ne soit pas le produit d'une fonction de  $D$  et d'une fonction de  $N_f$  afin de prédire des écarts à la loi de cumul linéaire de Miner.

Une forme particulière de  $g(D, N_f)$ , la plus simple possible vérifiant ces conditions, est

$$g(D, N_f) = \frac{1}{1 + 2\alpha(D - 1/2)} \quad (5)$$

avec  $\alpha \equiv \alpha(N_f)$  afin que  $g$  dépende de  $N_f$ .

$\alpha(N_f)$  signifie que  $\alpha$  dépend du niveau de chargement appliqué (et donc en fin de compte de  $N_f$ ).

Après avoir défini la forme de la modélisation particulière que nous avons choisie, nous allons appliquer la détermination des paramètres  $\alpha$  correspondant aux deux chargements, soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . On définit

$$G(D, N_f) = \int_0^D \frac{dD'}{g(D', N_f)} = \alpha D^2 + (1 - \alpha)D \quad (6)$$

Pour une succession de chargements  $(C_1, C_2)$ , l'endommagement total de Miner est :

$$D_{Miner} = \frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} \quad (7)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{N_1}{N_{f1}} = G(D, N_{f1}) \\ \frac{N_2}{N_{f2}} = 1 - G(D, N_{f2}) \end{cases} \quad (8)$$

où  $D$  représente l'endommagement de l'éprouvette après la 1<sup>ère</sup> sollicitation.

Les équations (8) permettent d'éliminer  $D^2$ , et d'obtenir la valeur de l'endommagement  $D$  sous la forme

$$D = \frac{\alpha_1(-1 + N_2/N_{f2}) + \alpha_2(N_1/N_{f1})}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (9)$$

En remplaçant dans l'équation (7),  $D$  par sa valeur trouvée à l'équation (9), on obtient une relation reliant les données expérimentales et les paramètres numériques  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

$$f_1(N_1/N_{f1}, N_2/N_{f2}, \alpha_1, \alpha_2) = 0$$

De même pour une succession de chargements  $(C_2, C_1)$ , on trouve une relation  $f_2(N'_1/N_{f1}, N'_2/N_{f2}, \alpha_1, \alpha_2) = 0$ .

Pour une succession de deux chargements, comme lors de nos expériences de fatigue, on devra déterminer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par la méthode des moindres carrés. Il est nécessaire pour cela d'avoir au minimum deux équations, donc au moins deux expériences.

## 5 Comparaison des résultats expérimentaux avec le nouveau modèle

Cette partie compare les résultats obtenus avec le nouveau modèle et ceux trouvés lors des douze expériences de fatigue sur des éprouvettes "diabolos" en Styrene-Butadiene-Rubber et chargées à 30 et 60 PCE. Les résultats des durées de vie obtenues par le modèle et lors des expériences sont regroupés dans le tableau 1 pour l'éprouvette A et dans le tableau 2 pour l'éprouvette B.

$D_{Miner\ 1exp}$  et  $D_{Miner\ 1modele}$  représentent les endommagements obtenus expérimentalement et grâce au modèle pour la sollicitation 1, et  $D_{Miner\ 2exp}$  et  $D_{Miner\ 2modele}$  pour la sollicitation 2.

$D_{pred\ 1Miner}$  représente l'endommagement restant jusqu'à la rupture de la pièce après avoir effectué la sollicitation 2 et calculé grâce à la loi de cumul d'endommagement de Miner.

$D_{pred\ 2Miner}$  représente l'endommagement restant jusqu'à la rupture de la pièce après avoir effectué la sollicitation 1 et calculé grâce à la loi de cumul d'endommagement de Miner.

L'ordre des chargements  $(C_1, C_2)$  ou  $(C_2, C_1)$  permet de connaître le premier chargement appliqué à la pièce. En effet, si celui-ci vaut  $(C_2, C_1)$  comme à la ligne 8 du tableau 1, alors le 1<sup>er</sup> chargement appliqué est la sollicitation 2 jusqu'à un endommagement de Miner de 0.66 puis jusqu'à rupture pour la sollicitation 1.

Ordre des chargements	$D_{Miner1}$		$D_{Miner2}$		$D_{Miner}$ total exp	$D_{Miner}$ total modele
	$D_{Miner\ 1exp}$	$D_{Miner\ 1modele}$	$D_{Miner\ 2exp}$	$D_{Miner\ 2modele}$		
$(C_1, C_2)$	0.33	0.17	0.81	0.70	1.14	0.87
	0.33	0.44	0.31	0.38	0.64	0.82
	0.33	0.55	0.13	0.28	0.46	0.83
	0.66	0.80	0.01	0.11	0.67	0.91
	0.66	0.50	0.43	0.32	1.09	0.82
	0.66	0.64	0.23	0.22	0.89	0.86
$(C_2, C_1)$	0.40	0.46	0.66	0.70	1.06	1.16
	0.62	0.56	0.66	0.62	1.28	1.18
	0.63	0.57	0.66	0.62	1.29	1.19
	0.57	0.73	0.33	0.44	0.90	1.17
	0.64	0.75	0.33	0.41	0.97	1.16
	1.10	0.90	0.33	0.19	1.43	1.09

TAB. 1 – Comparaison des durées de vie obtenues avec le modèle et lors des expériences pour l'éprouvette A

La comparaison des résultats obtenus lors des expériences et grâce au modèle montre pour l'éprouvette A (Tableau 1), de meilleures prédictions que la loi de cumul de Miner, même dans le cas où l'on observe un endommagement pour l'un des chargements, supérieur à 1 (ligne 12 du tableau 1). En effet,  $D_{Miner\ 1exp}$  trouvé vaut 1.10, le modèle donne  $D_{Miner\ 1modele} = 0.90$ , soit une erreur de 18% et la loi de Miner donne  $D_{pred\ 1Miner} = 0.67$ , soit une erreur de 39%.

Pour ces séquences de chargements, le modèle permet de trouver  $\alpha_1 = 0.430$  et  $\alpha_2 = -0.300$  correspondant respectivement aux chargements 1 et 2.

Ordre des chargements	$D_{Miner1}$		$D_{Miner2}$		$D_{Miner}$ total exp	$D_{Miner}$ total modele
	$D_{Miner\ 1exp}$	$D_{Miner\ 1modele}$	$D_{Miner\ 2exp}$	$D_{Miner\ 2modele}$		
$(C_1, C_2)$	0.33	0.27	1.66	0.94	1.99	1.21
	0.33	0.23	2.08	0.96	2.41	1.19
	0.33	0.27	1.56	0.94	1.89	1.21
	0.66	0.59	1.47	0.68	2.13	1.27
	0.66	0.68	0.40	0.57	1.06	1.25
	0.66	0.64	0.74	0.61	1.40	1.25
$(C_2, C_1)$	0.12	0.13	0.66	0.74	0.78	0.87
	0.05	0.07	0.66	0.86	0.71	0.93
	0.04	0.06	0.66	0.87	0.70	0.93
	0.15	0.18	0.33	0.65	0.48	0.83
	0.11	0.14	0.33	0.71	0.44	0.85
	0.08	0.12	0.33	0.76	0.41	0.88

TAB. 2 – Comparaison des durées de vie obtenues avec le modèle et lors des expériences pour l'éprouvette B

Les résultats expérimentaux obtenus pour l'éprouvette B (Tableau 2) montrent des disparités plus importantes avec la loi de Miner car les endommagements de Miner totaux sont soit très supérieurs à 1, soit très inférieurs à 1. Le modèle rend mieux compte des résultats expérimentaux que la loi de Miner lorsque l'endommagement pour un seul chargement est très supérieur à 1 comme à la ligne 1. En effet,  $D_{Miner\ 2exp}$  trouvé vaut 1.66, le modèle donne  $D_{Miner\ 2modele} = 0.94$  soit une erreur de 43% et la loi de Miner  $D_{pred\ 2Miner} = 0.67$  soit une erreur de 60%. Pour ces séquences de chargements, le modèle permet de trouver  $\alpha_1 = -0.09$  et  $\alpha_2 = 1$  correspondant respectivement aux chargements 1 et 2. Même si notre modèle reproduit de façon moins satisfaisante les résultats des expériences de fatigue pour l'éprouvette B que pour l'éprouvette A, l'objectif de s'approcher plus des expériences que les prédictions de la loi de cumul de Miner, est réalisé.

## 6 Conclusion

Une campagne expérimentale de fatigue réalisée sur des éprouvettes "diabolos" chargées en noir de carbone à 30 et 60 PCE a permis de tester la loi de cumul d'endommagement de Miner et de conclure que les prévisions de celle-ci en termes de durées de vie n'étaient pas précises. Afin de pallier les insuffisances de la loi de Miner, nous avons proposé une modélisation particulière. Celle-ci a permis d'obtenir des valeurs des endommagements de Miner plus proches des résultats expérimentaux que les prédictions de la loi de cumul de Miner. En

effet, celle-ci ne permet pas d'obtenir un endommagement total supérieur ou inférieur à 1 lorsque l'éprouvette est cassée, contrairement au nouveau modèle heuristique présenté dans cet article et vérifié sur deux types de matériaux.

## **Références**

- [1] Klenke D. and Beste A. Ensurance of the fatigue life of metal-rubber component. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 40, 1067–1071, 1987.
- [2] Lemaitre J., L. et Chaboche. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée*, 2, 317–363, 1978.
- [3] Ellyin F. and Kujawski D. A cumulative damage theory for fatigue crack initiation and propagation. *International Journal of Fatigue*, 6, 83–88, 1984.
- [4] Ellyin F. and Kujawski D. On the concept of cumulative fatigue damage. *International Journal of Fracture*, 37, 263–278, 1988.
- [5] Miner M. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 67, A159–A164, 1945.